Revista Matiz Online
ISSN 21794022

# UM ESTUDO DAS FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAUS APLICADAS À ECONOMIA

**Valeria Ap. Martins Ferreira[1], Viviane Carla Fortulan[2]**
[1] Mestre em Ciências pela Universidade de São Paulo- USP. Professora da Faculdade de Tecnologia de Sertãozinho. Professora de EAD no COC Ribeirão Preto-SP.
[2] Mestre em Ciências pela Universidade de São Paulo-USP. Professora de Ensino Superior no IMMES-Matão. Professora da Faculdade de Tecnologia de Jabotical-SP.

## RESUMO

O estudo de funções faz parte do conteúdo programático que deve ser estudado no Ensino Fundamental e Médio. Frequentemente**,** este conteúdo é dado definindo o que é função e quais são as funções principais, como a função afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica. Também é abordada a construção dos gráficos dessas funções. Mas, na maioria das vezes, não é mostrada a aplicabilidade das funções nas mais diversas áreas. Muitos estudiosos acreditam que, explorando a construção de modelos matemáticos através de funções simples de primeiro e segundo graus, as aulas podem se tornar mais dinâmicas e interessantes aos alunos, que poderão ver a aplicação deste conteúdo.

Este trabalho tem como objetivo mostrar como funções de 1º e 2º graus são utilizadas na economia e como a análise de seus gráficos são importantes na tomada de decisões. Com isso pretende-se mostrar também a importância de se utilizar a interdisciplinaridade na elaboração das aulas.

**Palavras Chave: Funções Simples de 1º e 2º grau. Análise de Gráficos. Interdisciplinaridade.**

## INTRODUÇÃO: FUNÇÕES

Em muitos estudos ou experimentos científicos pode-se identificar grandezas mensuráveis ligadas a eles e com isto estabelecer relações existentes entre estas grandezas.

Por exemplo: Um restaurante oferece refrigerantes variados ao preço de R$2,00 cada um. Para não ter que fazer contas a todo momento, a balconista do restaurante montou a seguinte tabela:

**Tabela 1.1: Preço, de acordo com a quantidade de refrigerantes**

| Quantidade de refrigerantes | Preço (R$) |
|---|---|
| 1 | 2,00 |
| 2 | 4,00 |
| 3 | 6,00 |
| 4 | 8,00 |
| 5 | 10,00 |
| 6 | 12,00 |
| 7 | 14,00 |
| 8 | 16,00 |
| 9 | 18,00 |
| 10 | 20,00 |

Nesse exemplo pode-se identificar duas grandezas: a quantidade de refrigerantes consumidos e o respectivo preço. Verifica-se que a cada quantidade de refrigerantes tem-se um único preço correspondente. Então, o preço é função da quantidade de refrigerantes e identifica-se por $x$ a quantidade de refrigerantes consumidos e por $y$ o preço. Identifica-se $x$ como variável independente e $y$ como variável dependente, pois os valores que $y$ assume dependem dos correspondentes valores de $x$.

Uma fórmula que estabelece a relação de interdependência entre o preço ( $y$ ) e o número de refrigerantes consumidos ( $x$ ) é dada por:

$$y = 2{,}00 \cdot x$$

Segundo Iezzi et al. (2007, p.20), “em Matemática, se $x$ e $y$ são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a $x$ existe, em correspondência, um único valor para $y$, diz-se que $y$ é uma função de $x$”.

O conjunto formado por valores que podem ser atribuídos a $x$ é chamado domínio da função e identificado por D.

O valor de $y$, correspondente a determinado valor atribuído a $x$, é chamado imagem de $x$ pela função e habitualmente representado por $f(x)$. Estes valores compõem o conjunto Im.

Esquematicamente, tem-se:

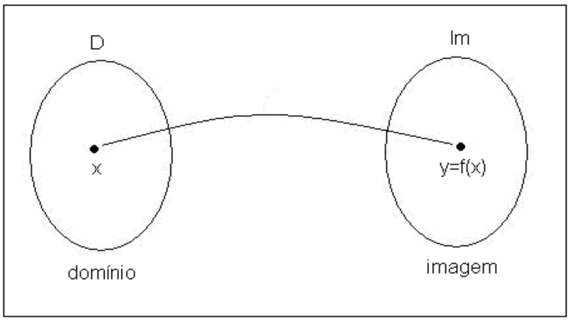


**Figura 1.1 Relação entre as variáveis $x$ e $y$.**
**Fonte: Iezzi et al. (2007, p.20).**

## 1.1 Funções definidas por fórmulas

Há um maior interesse no estudo de funções onde por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei), pode-se calcular os valores de $y$ a partir dos valores de $x$.

Exemplo 1.1

A lei de correspondência que associa cada número real $x$ ao número $y$ onde $y$ é o triplo de $x$, é uma função definida pela fórmula $y = 3 \cdot x$. O diagrama abaixo apresenta, para alguns valores atribuídos a $x$, o correspondente valor de $y$.

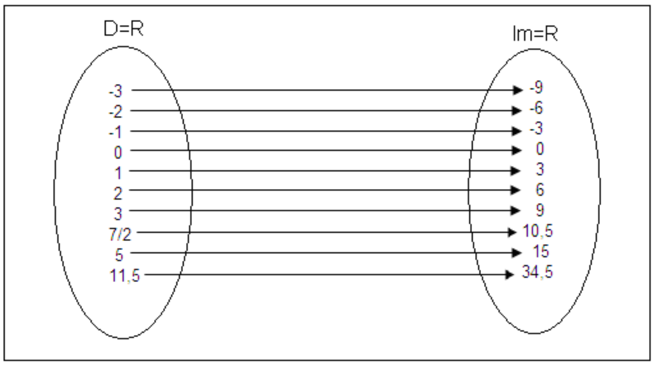


**Figura 1.2: Diagrama da relação $y = 3 \cdot x$.**

No estudo dessa função pode-se fazer algumas observações, como:

- para $x = 2$, tem-se que $y = 3 \cdot 2 = 6$.

Tem-se que $f(2) = 6$.

- a imagem de $x = -1$ é $f(-1) = 3 \cdot (-1) = -3$.

### 1.1.1 Domínio e contradomínio

Para que uma função $f$ esteja bem caracterizada é necessário, além da lei de correspondência que associa $x$ a $y$, o domínio de $f$.

Muitas vezes ao se fazer referencia a uma função $f$, é fornecida apenas a sua lei de correspondência. Quando não é dado explicitamente o domínio D de $f$, deve-se subtender que D é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de $x$ na lei de correspondência $y = f(x)$, de modo que, efetuado os cálculos, $y$ resulte em um número real. Por exemplo:

- O domínio da função definida pela lei $f(x) = 2x + 3$ é $\Re$, pois, qualquer que seja o valor real atribuído a $x$, o número $2x + 3$ também é real.



**REVISTA MATIZ ONLINE** Matão (SP): Instituto Matonense Municipal de Ensino Superior.
Programa de divulgação científica do Immes, 2012. Disponível em: http://www.immes.edu.br/

- O domínio da função $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$ é $\Re$-{2}, pois, para todo $x$ real diferente de 2, o número $\dfrac{x+5}{x-2}$ é real.
- O domínio da função $f(x)=\sqrt{x-3}$ é D=$\{x\in\Re/x\geq 3\}$, pois $\sqrt{x-3}$ só é real se $x-3\geq 0$.
- A função $f(x)=\dfrac{1}{x-5}+\sqrt{x}$ só é definida para $x-5\neq 0$ e $x\geq 0$; então seu domínio é D={ $x\in\Re/x\geq 0$ e $x\neq 5\}$.

Às vezes, no estudo de algumas funções, não é muito simples determinar o seu conjunto imagem. Nesses casos, é apresentado o conjunto E, chamado de contradomínio de $f$. Este conjunto contém o conjunto imagem de $f$ .

De modo geral, a notação $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ representa uma função com domínio A e contradomínio B.

## 1.2 Gráficos

A construção de gráficos de funções é muito importante, pois, através deles, muitas informações sobre o comportamento da função podem ser obtidas. Pode-se analisar o crescimento (ou decrescimento) da função, identificar os valores máximos (ou mínimos) que ela assume etc.

### 1.2.1 Construção de gráficos

Um roteiro fácil, que auxilia a construção de gráficos é descrito a seguir:

- Constrói-se um quadro com duas colunas ($x$ e $y$) . Atribui-se valores para $x$ e calcula-se o correspondente valor de $y$ através da lei $y=f(x)$;
- Representa-se cada par ordenado ($x,y$) do quadro por um ponto do plano cartesiano. Liga-se os pontos obtidos por meio de uma curva, que é o próprio gráfico da função $y=f(x)$.

Existem várias funções que são estudadas no ensino fundamental e médio como: funções afim, quadráticas, modulares, exponenciais e logarítmicas mas, neste estudo, será apresentada as duas funções mais utilizadas na área de administração e economia: função afim e função quadrática.

## 1.3 Função afim

### 1.3.1 Definição de função afim

Segundo Dante (2005, p.53), "uma função $f:\Re \rightarrow \Re$ é denominada função afim quando existem dois números reais $a$ e $b$ tal que $f(x)=ax+b$, para todo $x \in \Re$".

Na função $f(x)=ax+b$, o número $a$ é chamado coeficiente de $x$ e o número $b$ é chamado termo constante.

Exemplos de funções afim:

- $f(x)=4x-1$, em que $a$ = 4 e $b$ = -1
- $f(x)=-x-8$, em que $a$ = -1 e $b$ = -8
- $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{3}{4}$, em que $a$ = $\frac{1}{5}$ e $b$ = $\frac{3}{4}$
- $f(x)=21x$, em que $a$ = 21 e $b$ = 0
- 

### 1.3.2 Gráfico da função

O gráfico da função afim ou função polinomial do 1º grau, $f(x)=ax+b$, com $a$ $\neq$ 0, é uma reta.

Exemplo 1.2: Construir o gráfico da função $f(x)=x+3$.

Seguindo o roteiro proposto no item 1.2.1, constrói-se um quadro atribuindo valores para $x$ e calculando, através da lei $y=f(x)=x+3.$, os respectivos valores de $y$.

Como o gráfico é uma reta, basta encontrar dois pontos para a construção do gráfico. O domínio de uma função afim é formado pelo conjunto dos números reais, portanto pode-se atribuir quaisquer dois valores para $x$ na função $f(x)=x+3$.

- Para $x$ = 0, tem-se $f(x) = 0 + 3 = 3$. Portanto, um ponto é (0,3).
- Para $x$ = -3, tem-se $f(x) = -3 + 3 = 0$. Portanto, o outro ponto é (-3,0).

Portanto, a reta procurada passa pelos pontos (0,3) e (-3,0) e seu gráfico é o da Figura 1.3.

| **x** | **y** |
|---|---|
| 0 | 3 |
| -3 | 0 |

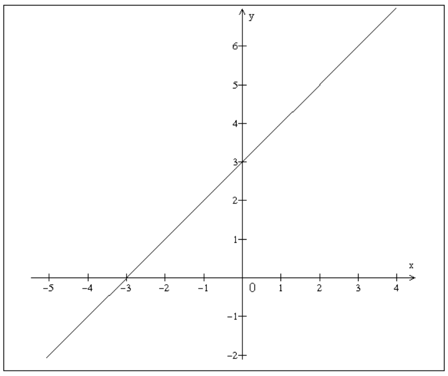


**Figura 1.3: Gráfico da função** $f(x) = x + 3$.

### 1.3.3 Coeficientes da função afim

Como visto no Exemplo 1.2, o gráfico de uma função afim é uma reta.

O coeficiente de $x$, $a$, é chamado de coeficiente angular da reta e se refere à inclinação da reta em relação ao eixo Ox. O termo constante, $b$, é chamado de coeficiente linear da reta. Ele é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy, pois para $x$ =0, temos $f(x) = a \cdot 0 + b = b$ (IEZZI et al., 2005, p. 41).

O coeficiente $a$ representa a variação de $y$ correspondente a um aumento do valor de $x$ igual a 1. Esse aumento é considerado a partir de qualquer ponto da reta. (MORETTIN et al., 2004, p. 56).

### 1.3.4 Zero de uma função afim

O zero da função afim é o valor de $x$ tal que $f(x)=0$.

Portanto:

$$f(x)=0 \Rightarrow ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

ou seja, a raiz da função $f(x)=ax+b$ é a solução da equação do 1º grau $ax+b=0$.

Alguns exemplos:

- Obtenção do zero da função $f(x)=3x+2$:

  $f(x)=0 \Rightarrow 3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$.

- Cálculo da raiz da função $g(x)=5x+10$:

  $g(x)=0 \Rightarrow 5x+10=0 \Rightarrow x=-2$

### 1.3.5 Crescimento e decrescimento

Uma função afim $f(x)=ax+b$, com $a \neq 0$, é crescente quando o valor do coeficiente angular for positivo e decrescente quando for negativo.

Quando $a=0$, o valor de $f(x)$ permanece constante para qualquer valor atribuído a $x$. Portanto, o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo $x$ passando pelo ponto $(0, b)$.

## 1.4 Função quadrática

Uma função quadrática, ou função polinomial de 2º grau, é definida como uma função $f$ de $\Re$ em $\Re$ da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, em que $a, b$ e $c$ são números reais e $a \neq 0$.

Alguns exemplos de funções quadráticas:

- $f(x)=3x^2+5x+1$, sendo $a=3, b=5$ e $c=1$.
- $f(x)=2x^2-9x+3$, sendo $a=2, b=-9$ e $c=3$.
- $f(x)=x^2-4$, sendo $a=1, b=0$ e $c=-4$.

### 1.4.1 Gráfico da função

O gráfico da função quadrática é uma curva chamada parábola.

Ao se construir o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, nota-se que:

- Se $a$ > 0, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- Se $a$ < 0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

A Figura 1.4 apresenta o gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

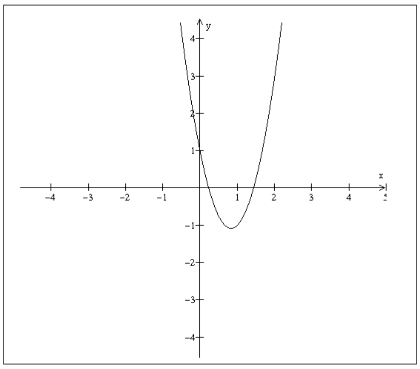

**Figura 1.4: Gráfico da função** $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

A concavidade da parábola é para cima pois $a = 3 > 0$. Este gráfico pode ser construído da mesma maneira que o roteiro seguido na construção do gráfico da função afim, mas, neste caso, deve-se atribuir mais valores para se conseguir desenhar melhor a curva. Nos itens subsequentes serão apresentados como encontrar os zeros de funções quadráticas bem como as coordenadas dos vértices da parábola, que facilitam a construção do gráfico.

### 1.4.2 Zeros da função do 2º grau

Os zeros da função quadrática ou função polinomial do 2º grau são os valores de $x$ tais que $f(x) = 0$. O número de zeros depende do valor do discriminante, ou delta, definido por $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se $\Delta$ > 0, a função terá dois zeros reais de distintos.
- Se $\Delta$ =0, a função terá apenas um zero real (com maior precisão, diz-se que a função tem dois zeros iguais).
- Se $\Delta$ < 0, a função não terá zeros reais (com maior precisão, diz-se que a função tem dois zeros complexos conjugados).

### 1.4.3 Coordenadas do vértice da parábola

Quando $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo $V$ e quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo $V$.

Este ponto $V$ é chamado vértice da parábola e suas coordenadas são obtidas por:

$$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

### 1.4.4 Imagem

O conjunto imagem Im da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, são os valores que $y$ pode assumir a partir de valores atribuídos a $x$.

Na definição do conjunto imagem há duas possibilidades:

- Quando $a > 0$

$$\text{Im} = \{ y \in \Re / \ y \geq y_v = -\frac{\Delta}{4a} \}$$

pois o vértice é um ponto de mínimo, ou seja, o menor valor que $y$ pode assumir é $-\frac{\Delta}{4a}$.

- Quando $a < 0$

$$\text{Im} = \{ y \in \Re / \ y \leq y_v = -\frac{\Delta}{4a} \}$$

pois o vértice é um ponto de máximo, ou seja, o maior valor que $y$ pode assumir é $-\frac{\Delta}{4a}$.

### 1.4.5 Construção da parábola

Para a construção do gráfico de uma função do 2º grau não é necessário montar um quadro de pares ($x$, $y$).

Como foi visto anteriormente, o valor de $a$ define a concavidade da parábola. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$. O vértice $V$ $(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a})$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou de máximo (se $a < 0$). A reta que passa por $V$ e é paralela ao eixo $y$ é o eixo de simetria da parábola. Para $x$=0, tem-se $f(x) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$;então (0,c) é ponto em que a parábola corta o eixo $y$.

Depois da identificação de cada um destes pontos, fica fácil a construção da parábola.

Exemplo 1.3: Construir o gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Para a construção do gráfico desta função será determinada algumas características que auxiliam na construção do mesmo:

- Concavidade voltada pra cima, pois $a = 3 > 0$;
- Raízes: $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$.
- Vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ onde $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$.
- Intersecção com o eixo $y$: (0,c) = (0,1).
- Im={ $y \in \Re / y \geq -\frac{1}{3}$ } pois , como $a = 3 > 0$, o vértice é um ponto de mínimo.

Com estas informações fica simples a construção do gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

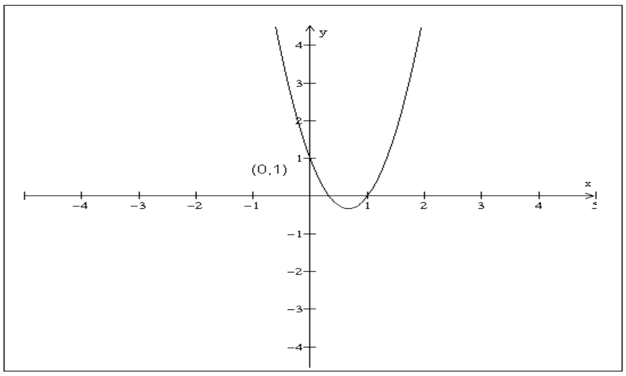

**Figura 1.5: Gráfico da função** $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

## 2 FUNÇÕES LINEARES E QUADRÁTICAS APLICADAS EM NEGÓCIOS

Uma grande variedade de problemas em negócios pode ser resolvida através do uso de equações e análise de seus gráficos. Com eles pode-se estudar custos, vendas, consumo, oferta e demanda. Para exemplificar, será abordado algumas dessas funções bem como a construção e análise de seus gráficos.

### 2.1 Função demanda

De acordo com Morettin et al. (2004, p.65), "a demanda de um determinado bem é a quantidade desse bem que os consumidores pretendem adquirir num certo intervalo de tempo (dia, mês, ano e outros)".

A demanda de um bem é função de várias variáveis, como: preço por unidade do produto, renda do consumidor, gostos, etc. Supondo que todas as variáveis mantenham-se constantes, exceto o preço unitário do próprio produto ( $p$ ), verifica-se que o preço ( $p$ ) relaciona-se com a quantidade demandada ( $x$ ),e que esta relação, indicada por $p = f(x)$, é denominada função de demanda.

O gráfico de $p$ em função de $x$ é denominado curva de demanda. Será considerado aqui a função de demanda de 1º grau, portanto o gráfico é uma reta decrescente, pois quanto maior o preço, menor a quantidade demandada.

A lei de demanda afirma que a quantidade demandada aumenta conforme o preço da mercadoria diminui ou que a quantidade demandada diminui conforme aumenta o preço. Embora a quantidade demandada seja uma função do preço, os economistas, tradicionalmente, representam graficamente a função de demanda com o preço no eixo vertical (HARSHBARGER; REYNOLDS, 2006, p. 128).

Os parâmetros da função de demanda são geralmente determinados por métodos estatísticos através dos modelos de regressão.

Exemplo 2.1: A quantidade de sucos ( $x$ ) demandada por semana numa lanchonete relaciona-se com o preço unitário ( $p$ ) de acordo com a função de demanda $p = 8 - 0{,}004 \cdot x$.

Assim, se o preço por unidade for R$ 3,50, a quantidade ( $x$ ) demandada por semana será dada por:

$$3{,}50 = 8 - 0{,}004x$$
$$0{,}004x = 4{,}50$$
$$x = 1.125$$

ou seja, com um preço unitário de R$ 3,50 serão vendidos 1.125 sucos semanais.

O gráfico de ( $p$ ) em função de ( $x$ ) é um segmento de reta (curva de demanda) localizado no primeiro quadrante, pois tanto $p$ como $x$ não podem ser negativos.

Para a construção do gráfico desta função, basta atribuir dois valores para $x$ e encontrar os respectivos valores de $p$ , ou seja,

- para $x$ =0 tem-se: $p = 8 - 0{,}004 \cdot (0) = 8$;
- para $x$ =2.000 tem-se: $p = 8 - 0{,}004 \cdot (2.000) = 0$.

A Figura 2.1 ilustra o gráfico da função $p = 8 - 0{,}004 \cdot x$

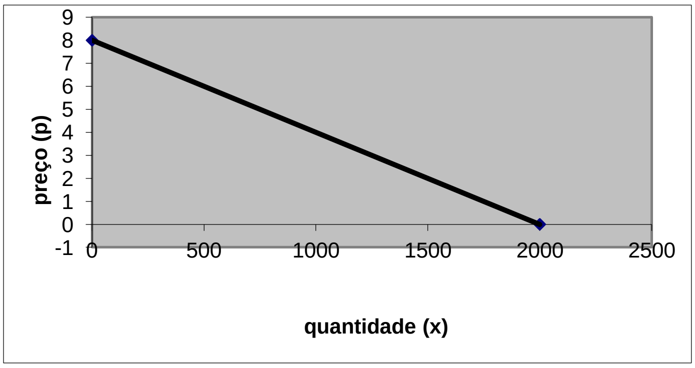


**Figura 2.1: Gráfico da função de demanda** $p = 8 - 0{,}004 \cdot x$

## 2.2 Função oferta

Segundo Morettin et al. (2004, p.66), "chamamos de oferta de um bem, num certo intervalo de tempo, à quantidade do bem que os vendedores desejam oferecer no mercado".

A oferta de um bem é função de várias variáveis, como: preço do bem, preços dos insumos (matéria prima, equipamentos, capital, horas de trabalho, etc.) utilizados na produção, as tecnologias utilizadas na produção do bem, etc. Supondo que todas as variáveis mantenham-se constantes, exceto o preço do próprio bem ( $p$ ), verifica-se que o preço do bem ( $p$ ) relaciona-se com a quantidade ofertada ( $x$ ),e que esta relação, indicada por $p = g(x)$, é denominada função de oferta.

O gráfico de $p$ em função de $x$ é denominado curva de oferta. Será considerada aqui a função de oferta do 1º grau, portanto o gráfico é uma reta crescente, pois quanto maior o preço, maior a quantidade ofertada.

O desejo dos consumidores em comprar determinado bem está relacionado como o preço deste bem e o desejo do fabricante em fornecer mercadorias também está relacionado com o preço destas mercadorias. A lei da oferta afirma que a quantidade ofertada para a venda aumentará conforme o preço do produto aumentar. Como no gráfico da demanda, o preço aparece no eixo vertical (HARSHBARGER; REYNOLDS, 2006, p. 128).

Exemplo 2.2: Admita-se que, para quantidades que não excedam sua capacidade de produção, a função de oferta do Exemplo 2.1, seja do 1º grau. Suponha que, se o preço por suco for R$ 2,00, a quantidade ofertada será 300 por semana, e, se o preço for R$ 2,50, a quantidade ofertada será 1.500. A função de oferta será obtida por:

O coeficiente angular de uma reta é obtido por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}50 - 2{,}00}{1.500 - 300} = \frac{0{,}50}{1.200} = \frac{1}{2.400}$$

Conhecido um ponto $P(x_0, y_0)$ de uma reta e seu coeficiente angular $m$ , a equação da reta é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Então:

$$p - 2{,}00 = \frac{1}{2.400}(x - 300)$$

ou seja,

$$p = \frac{1}{2.400}x + 1{,}875$$

Colocando os pares ordenados $(300{,}2)$ e $(1.500{,}2.50)$ no plano cartesiano será obtido o gráfico da função oferta $p = \frac{1}{2.400}x + 1{,}875$.

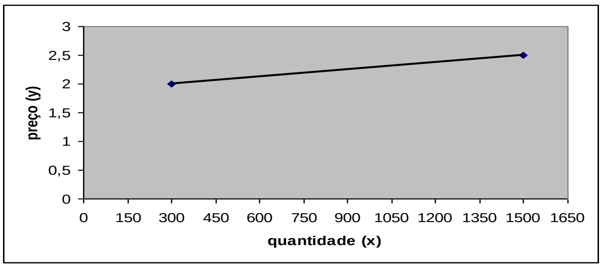


**Figura 2.2: Gráfico da função oferta** $p = \frac{1}{2.400}x + 1{,}875$

## 2.3 Ponto de equilíbrio ou equilíbrio de mercado

Uma importante aplicação econômica envolvendo interseção de gráficos surge em conexão com a lei da oferta e demanda.

Chama-se de ponto de equilíbrio a interseção entre as curvas de demanda e oferta. O preço, neste ponto, é o preço de equilíbrio e a quantidade neste ponto é a quantidade de equilíbrio.

Exemplo 2.3: Encontrar o ponto de equilíbrio considerando as funções de demanda e de oferta dadas nos Exemplos 2.1 e 2.2 respectivamente.

Tem-se que, no ponto de equilíbrio, o preço é o mesmo na curva de demanda e de oferta. Portanto:

$$8 - 0{,}004 \cdot x = \frac{1}{2.400}x + 1{,}875$$

$$19.200 - 9.6 \cdot x = x + 4.500$$

$$10{,}6 \cdot x = 14.700$$

$$x \cong 1.386{,}79$$

Como $x$ indica quantidade (ofertada ou demandada) será considerado um valor inteiro, portanto, $x = 1.387$. Substituindo este valor numa das curvas, por exemplo, na da demanda, tem-se:

$$p = 8 - 0{,}004 \cdot x$$
$$p = 8 - 0{,}004 \cdot (1.387)$$
$$p = 2{,}452$$

Portanto, no ponto de equilíbrio, o preço do suco será de R$ 2,45 e a quantidade semanal vendida será 1.387 unidades.

De acordo com a lei de demanda e oferta, um bem tenderá a ser vendido no seu preço de equilíbrio. Se ele for vendido mais caro do que o preço de equilíbrio, haverá uma quantidade não vendida no mercado, e os comerciantes tenderão a diminuir seus preços, forçando-os em direção ao preço de equilíbrio. Por outro lado, se for vendido por menos do que o preço de equilíbrio, a demanda excederá a oferta, e os comerciantes tenderão a elevar seus preços em direção ao preço de equilíbrio.

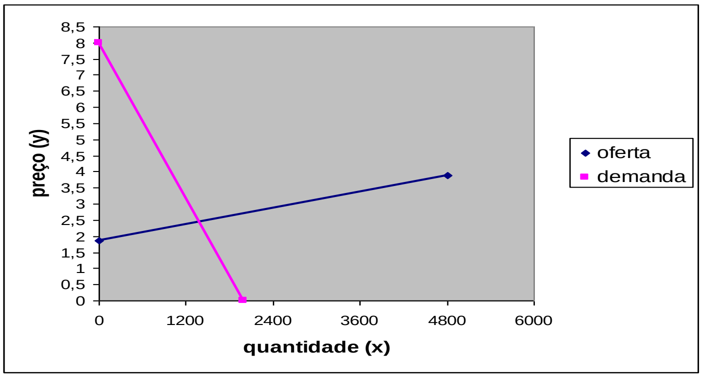


**Figura 2.3: Ponto de equilíbrio de mercado**

## 2.4 Função custo total

"Seja $x$ a quantidade produzida de um produto. O custo total de produção depende de $x$, e a relação entre eles é chamada de função custo total (ou simplesmente função custo), e a indica-se por $C$" (MORETTIN et al., 2004, p. 59).

O custo é composto de duas partes: custos fixos e custos variáveis.

Custos fixos: são os custos que não dependem da quantidade produzida, ou seja, permanecem constantes, e é representado por ($C_F$). São exemplos de custos fixos: aluguel, seguro, etc.

Custos variáveis: são aqueles que estão diretamente relacionados com o número de unidades produzidas, e é representado por ($C_V$).

Assim, o custo é determinado pela equação:

Custo = custos fixos + custos variáveis

$$C = C_F + C_V$$

O custo variável geralmente é igual a uma constante multiplicada pela quantidade $x$. Esta constante é denominada de custo variável por unidade.

Exemplo 2.4: O custo fixo mensal de fabricação de um produto é R$ 6.500,00, e o custo variável por unidade R$ 12,00. Então a função custo total é dada por:

$$C(x) = 6.500 + 12 \cdot x$$

## 2.5 Função receita total

A receita total $R$ está relacionada com o preço unitário e a quantidade vendida de determinado produto e sua função é dada por:

$$R(x) = p \cdot x$$

Exemplo 2.5: Um produto é vendido a R$ 25,00 a unidade (preço constante). A função receita será:

$$R(x) = 25 \cdot x$$

O gráfico dessa função é uma semi-reta passando pela origem pois trata-se de uma função do 1.º grau com coeficiente linear igual a zero. A Figura 2.4 ilustra o gráfico desta função.

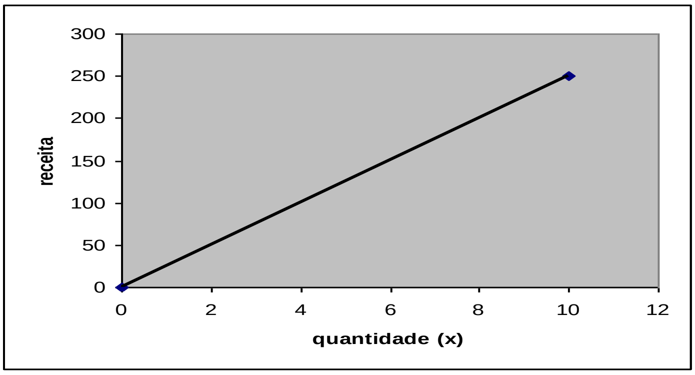


**Figura 2.4: Gráfico da função receita** $R(x) = 25 \cdot x$

## 2.6 Função lucro total

O lucro de uma empresa sobre o seu produto é a diferença entre o valor que ela recebe nas vendas (sua receita) e seu custo. (HARSHBARGER; REYNOLDS, 2006, p. 124). Indicando a função lucro por $L$ tem-se:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Observe que:

Se $R(x) > C(x)$ ➔ $L(x) > 0$, então a função lucro é denominada *lucro positivo*;

Se $R(x) < C(x)$ ➔ $L(x) < 0$, então a função lucro é denominada *lucro negativo*, ou seja, *prejuízo*.

Exemplo 2.6: Suponha que uma empresa fabrica bolsas e as vende a R$ 60,00 cada uma. Os custos incorridos na produção e venda das bolsas são de R$ 220.000,00 mais R$ 12,00 para cada bolsa produzida e vendida. A função lucro para produção e venda de $x$ bolsas e encontrada da seguinte forma.

Sabe-se que a função lucro é dada por $L(x) = R(x) - C(x)$, onde $R(x) = 60 \cdot x$ e $C = 220.000 + 12 \cdot x$. Portanto:

$$L(x) = 60 \cdot x - (220.000 + 12 \cdot x)$$
$$L(x) = 48 \cdot x - 220.000$$

As Figuras 2.5. 2.6 e 2.7 mostram os gráficos de $R(x)$, $C(x)$ e $L(x)$, respectivamente.

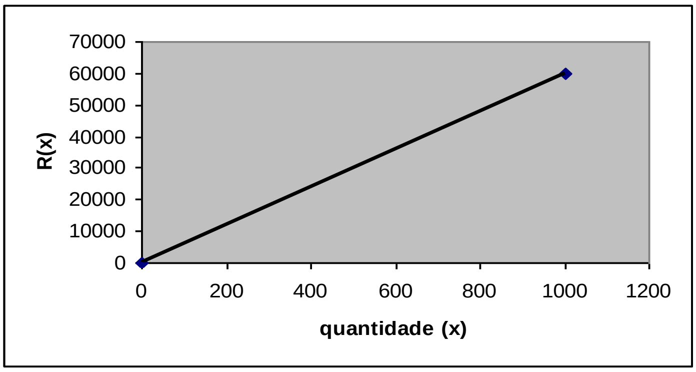


**Figura 2.5: Gráfico da função** $R(x) = 60 \cdot x$

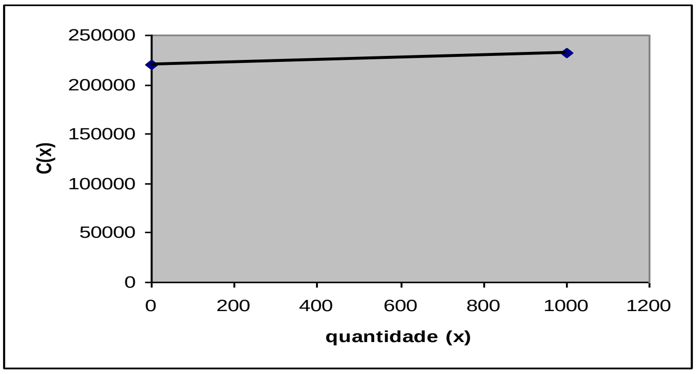


**Figura 2.6: Gráfico da função** $C(x) = 220.000 + 12 \cdot x$

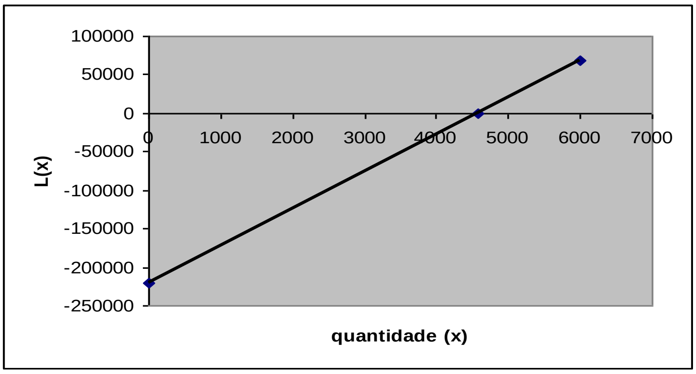


**Figura 2.7: Gráfico da função** $L(x) = 48 \cdot x - 220.000$

Ao analisar os gráficos acima pode-se observar que:

- Receita: nenhuma unidade produzida gera receita 0;
- Custo: O custo de nenhuma unidade produzida é igual aos custos fixos de R$ 220.000,00;

- Lucro: nenhuma unidade produzida gera um prejuízo igual aos custos fixos de R$ 220.000,00 e que 4583,33 unidades resultam em um lucro de R$ 0,00, ou seja, não existe nem lucro nem prejuízo. Pelo gráfico 2.7 é possível observar que se as quantidades produzidas forem menores que 4.583,33 unidades, que é a raiz aproximada da equação $L(x) = 48 \cdot x - 220.000$, a empresa terá prejuízo e que a empresa começará a ter lucro a partir de 4.584 unidades produzidas.

## 2.7 Análise de equilíbrio

A construção do gráfico da função receita total e da função custo total no mesmo sistema de eixos mostra que as funções interceptam-se num ponto *N*. Nesteponto o custo e a receita são iguais e, portanto, o lucro é zero pois $L(x) = R(x) - C(x)$. Este ponto $N$ é chamado de ponto de equilíbrio ou nivelamento ou crítico.

Exemplo 2.7: Considerando os dados do Exemplo 2.6 tem-se que o ponto de equilíbrio é obtido igualando-se as equações custo total e receita total, ou seja,

$$R(x) = C(x)$$
$$60 \cdot x = 220.000 + 12 \cdot x$$
$$48 \cdot x = 220.000$$
$$x = 4.583{,}33$$

Portanto, a empresa terá lucro para $x \geq 4.584$ unidades e terá prejuízo para $x < 4.584$ unidades como já tinha sido comentado anteriormente.

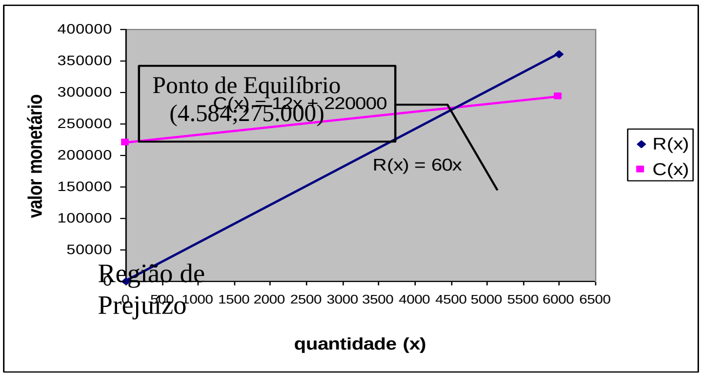


**Figura 2.8: Ponto de nivelamento.**

## 2.8 Aplicação das funções quadráticas em negócios

Aqui será estudado a construção dos gráficos das funções oferta e demanda quando estas funções forem quadráticas. Será mostrado também que o estudo do ponto de equilíbrio quando as funções são quadráticas é o mesmo daquele estudado para funções lineares. Também será usado o vértice de funções quadráticas para determinar os pontos de máximo das funções receita e lucro.

### 2.8.1 Oferta, demanda e equilíbrio de mercado

Quando equações quadráticas são usadas para representar curvas de oferta ou de demanda, a análise gráfica é feita através do primeiro quadrante das parábolas, pois, o eixo das abscissas, se refere à quantidade e não tem sentido trabalhar com quantidades negativas.

Exemplo 2.8: A função oferta para um produto é dada por $p = 0,2q^2 + 0,4q + 1,8$ e a função de demanda é dada por $p = -0,1q^2 - 0,2q + 9$. O interesse é determinar o ponto de equilíbrio de mercado.

Como foi visto no caso de funções lineares, o equilíbrio de mercado ocorre quando as duas equações possuem os mesmos valores de $p$. Assim:

$$0,2q^2 + 0,4q + 1,8 = -0,1q^2 - 0,2q + 9$$
$$0,3q^2 + 0,6q - 7,2 = 0$$
$$q = \frac{-0,6 \pm \sqrt{(0,6)^2 - 4(0,3)(-7,2)}}{2(0,3)}$$
$$q = -6 \text{ ou } q = 4$$

Como não tem sentido trabalhar com uma quantidade negativa, o ponto de equilíbrio ocorre quando são vendidas 4 unidades do produto. Substituindo este valor na função oferta ou demanda tem-se que o preço, no ponto de equilíbrio, será de:

$$p = -0,1q^2 - 0,2q + 9$$
$$p = -0,1(4)^2 - 0,2(4) + 9$$
$$p = 6,60$$

Portanto, o ponto de equilíbrio é (4; 6,60).

Os gráficos das funções ficarão dispostos da seguinte forma:

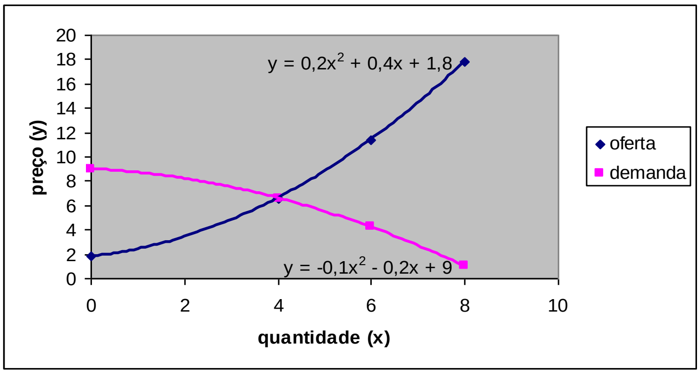


**Figura 2.9: Ponto de equilíbrio de mercado.**

### 2.8.2 Funções receita, custo e lucro e ponto de maximização

Muitas funções de receita total podem ser lineares, mas os custos tendem aumentar bruscamente depois de um certo nível de produção. Quando isto ocorre, as funções quadráticas são utilizadas para prever os custos totais dos produtos.

Exemplo 2.9: Se uma empresa tiver custo total dado por $C(x) = 0{,}5x^2 + 25x + 3600$ e receita total dada por $R(x) = -0{,}5x^2 + 175x$, encontre o ponto de equilíbrio e a quantidade que deve ser produzida para a empresa atingir o lucro máximo.

Como foi visto no caso de funções lineares, o ponto de equilíbrio é obtido igualando as equações custo total e receita total, ou seja,

$$R(x) = C(x)$$
$$-0{,}5x^2 + 175x = 0{,}5x^2 + 25x + 3600$$
$$x^2 - 150x + 3600 = 0$$
$$x = \frac{-(-150) \pm \sqrt{(-150)^2 - 4(1)(3600)}}{2}$$
$$x = 30 \text{ ou } 120$$

Portanto, o ponto de equilíbrio da empresa ocorrerá tanto em 30 unidades quanto em 120 unidades. A Figura 2.10 mostra os gráficos de $C(x)$ e $R(x)$. Pode-se observar através dele que a empresa obterá lucro depois de $x = 30$ até $x = 120$, pois $R(x) > C(x)$ nesse intervalo. Em $x = 30$ e $x = 120$, o lucro é zero e a empresa perderá dinheiro se ela produzir mais de 120 unidades.

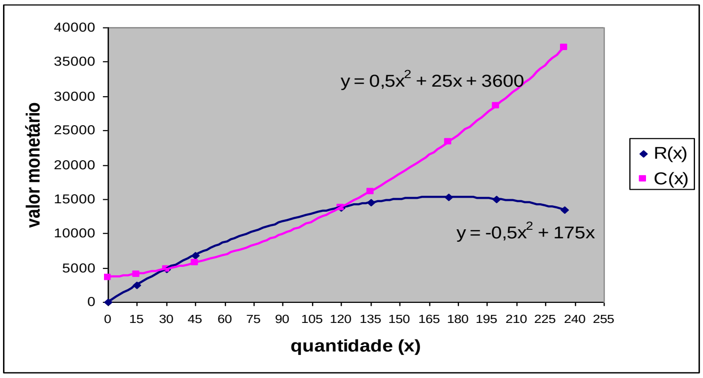


**Figura 2.10: Gráfico das funções receita e custo totais e ponto de equilíbrio.**

É fácil observar que o gráfico da função receita é uma parábola com concavidade para baixo $(a < 0)$. Portanto, o vértice é o ponto no qual a receita é máxima. Como visto no item 1.4.5, a coordenada $x$ do vértice é obtida por:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-175}{2(-0,5)} = 175 \text{ unidades}$$

Então, quando $x = 175$, a empresa alcança sua receita máxima de:

$$R(175) = -0,5(175)^2 + 175(175)$$
$$R(175) = 15.312,50 \text{ reais}$$

mas os custos quando $x = 175$ são:

$$C(x) = 0,5x^2 + 25x + 3600$$
$$C(x) = 0,5(175)^2 + 25(175) + 3600$$
$$C(x) = 23.287,50 \text{ reais}$$

o que resulta em prejuízo. Então, maximizar a receita não é um bom objetivo. Deve-se buscar maximizar o lucro.

Sabe-se que:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$
$$L(x) = -0{,}5x^2 + 175x - (0{,}5x^2 + 25x + 3600)$$
$$L(x) = -x^2 + 150x - 3600$$

O gráfico dessa função lucro é uma parábola com concavidade voltada para baixo ($a < 0$), portanto, o vértice será um ponto de máximo:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-150}{2(-1)} = 75$$

Então, para $x = 75$ temos:

$$L(x) = -x^2 + 150x - 3600$$
$$L(x) = -(75)^2 + 150(75) - 3600$$
$$L(x) = 2.025{,}00 \text{ reais}$$

ou seja, quando 75 unidades forem produzidas e vendidas, será atingido um lucro máximo de R$ 2.025,00.

A Figura 2.11 ilustra o gráfico da função lucro.

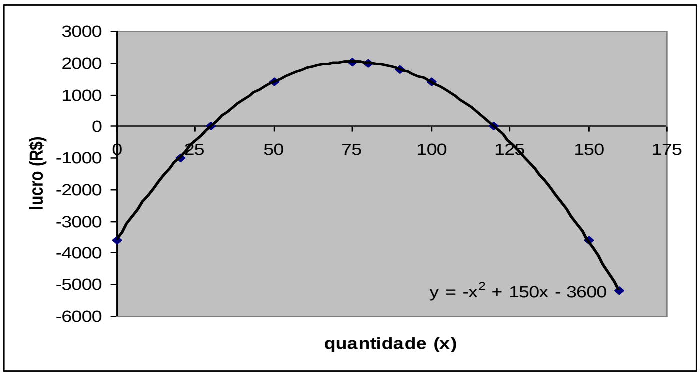


**Figura 2.11: Gráfico da função** $L(x) = -x^2 + 150x - 3600$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, procurou-se mostrar, além dos conceitos teóricos das funções lineares e quadráticas, a aplicação destas funções na área da economia.

Estudou-se as funções lineares de demanda e oferta que, analisadas simultaneamente, fornecem o ponto de equilíbrio de mercado, ou seja, o ponto que indica a quantidade a ser produzida e o preço que o produto deverá ser vendido. Foi mostrado também que estas informações podem ser obtidas através da construção dos gráficos das funções no mesmo plano cartesiano.

Já, com a análise das funções receita e custo totais pode-se encontrar a quantidade mínima que deve ser produzida para que uma empresa obtenha lucro. Estas informações também são obtidas através da análise gráfica das curvas das funções receita e custo construídas no mesmo plano cartesiano. Neste gráfico foi possível identificar a região de prejuízo e a região de lucro.

As mesmas funções estudadas através de modelos lineares foram estudadas considerando-as funções quadráticas. Como o gráfico para estas funções são parábolas mostrou-se como obter, através do vértice da parábola, a quantidade que deve ser produzida para que o lucro da empresa seja máximo.

Enfim, foi possível mostrar que a modelagem matemática através de funções de 1º e 2º graus é muito aplicada na área de negócios e de grande auxílio na tomada de decisões.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicação.** 2.ed. São Paulo:Ática, 2.005.

HARSHBARGER, R J.;REYNOLDS, J. J. **Matemática Aplicada: Administração, Economia, Ciências Sociais e Biológicas.** 7.ed. São Paulo:McGraw - Hill, 2.006.

IEZZI, G.;DOLCE, O.;LEGENSZAJN, D.;PÉRIGO, R. **Matemática: Volume Único.** 4.ed. São Paulo:Atual, 2.007.

LARSON, R. E.;HOSTETEU, R. P.;EDWARDS, B. H. **Cálculo com Aplicação.** 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1.995.

MORETTIN, P. A.;HAZZAN, S.; BUSSAB, W. de O. Cálculo: **Função de uma e duas variáveis.** 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2.004.