

ESTUDO DE MODELOS PARA AJUSTE E PREVISÃO DE UMA SÉRIE TEMPORAL

Valeria Ap. Martins Ferreira Viviane Carla Fortulan

1 Valéria Aparecida Martins. Mestre em Ciências pela Universidade de São Paulo- USP. Professora da Faculdade de Tecnologia de Sertãozinho. Professora de EAD no COC Ribeirão Preto-SP.

2 Viviane Carla. Mestre em Ciências pela Universidade de São Paulo-USP. Professora de Ensino Superior no IMMES-Matão. Professora da Faculdade de Tecnologia de Jabotical-SP.

RESUMO

É comum, no nosso dia a dia, deparar-se com gráficos apresentando, por exemplo, a evolução da taxa de desemprego nos últimos dois anos, índice de inflação nos últimos seis meses, a venda de determinado produto no último trimestre, etc.

A análise de informações como estas é de grande importância no auxílio a planejamentos e tomadas de decisões. Quando um conjunto de observações numéricas são registradas durante períodos regulares ao longo do tempo, esse conjunto de dados é denominado de série temporal.

O presente estudo tem por objetivo estudar modelos apropriados para descrever uma série temporal, identificando os componentes que podem ser encontrados na série e fazer previsão sobre valores futuros da série.

Para esse estudo, foi feito uso de pesquisas bibliográficas e exemplos para mostrar a eficácia das técnicas.

Palavras Chave: Gráficos. Modelo. Série Temporal

INTRODUÇÃO: Modelos de Séries Temporais

Séries temporais é um conjunto de observações sobre determinada variável tomada em períodos regulares, ou seja, ordenada no tempo. Como exemplos de séries temporais, tem-se: o preço diário de fechamento de determinada ação na bolsa de valores; gráficos de controles produtivos; valores mensais do IPC. As séries temporais não se restringem somente a dados econômicos ou relacionados a negócios. Pode-se estudar, ou melhor, analisar as matrículas dos alunos de uma determinada escola ao longo dos últimos anos, o índice de evasão escolar de uma região ao longo da última década; a taxa de desemprego de determinada região no

último semestre, etc. O principal objetivo de estudar uma série temporal é identificar fatores não aleatórios, criados por um sistema causal, que influenciam a série. A identificação destes fatores permite fazer previsões sobre valores futuros da série, auxiliando a tomada de decisões.

Os principais fatores componentes de séries temporais são:

- **A componente tendencial**

Esta componente mostra o comportamento da variável retratada na série em longo prazo. Existem três objetivos básicos para identificação de tendência em uma série temporal: avaliar o seu comportamento para se fazer previsões, removê-la da série para facilitar a visualização das outras componentes ou observar o comportamento crescente ou decrescente dessa tendência ao longo do prazo. A tendência pode ser obtida de três modos: utilizando um modelo de regressão, através de médias móveis ou de ajuste exponencial.

- **A componente cíclica**

Sempre se repete por certo período, tendo sempre uma duração nos valores da variável superior a um ano. As variações cíclicas são estudadas em resultados de variações econômicas com períodos de crescimento e decrescimento ou fenômenos climáticos com periodicidade superior a um ano.

- **A componente sazonal**

Tem duração inferior a um ano, mas se repete todos os anos. Normalmente é verificada nas estações do ano, feriados e festas como natal, páscoa, dia das mães, etc. Os fatores sazonais são registrados em típicas subidas e descidas que ocorrem durante o ano.

- **A componente irregular**

As flutuações inesperadas em uma série temporal, que são resultados inexplicáveis como fenômenos naturais, decisões intempestivas de governos, etc., são classificadas como variações irregulares.

1.1 Modelos Clássicos De Séries Temporais

Para se atingir os objetivos na análise de uma série temporal deve ser utilizado modelos matemáticos que incluam os fatores que compõe a série temporal. O modelo fundamental é o *Modelo Clássico Aditivo ou Multiplicativo*.

A fórmula do modelo clássico aditivo é dada por:

$$Y_i = T_i + C_i + S_i + I_i \quad (1)$$

onde:

Y_i são os valores da série;

T_i são os valores da componente tendencial;

C_i são os valores da componente cíclica;

S_i são os valores da componente sazonal e,

I_i são os valores da componente irregular.

$i = 1, 2, \dots, n$

Se os dados forem registrados anualmente, o modelo restringe-se a:

$$Y_i = T_i + C_i + I_i \quad (2)$$

A componente sazonal não aparece no modelo, pois não é possível observar as flutuações que se repetem sistematicamente dentro dos anos.

O modelo clássico multiplicativo de séries temporais estabelece que qualquer valor observado em uma série temporal é o produto desses fatores componentes, desta forma, o modelo multiplicativo pode ser expresso como:

$$Y_i = T_i \cdot C_i \cdot S_i \cdot I_i \quad (3)$$

onde:

Y_i são os valores da série;

T_i são os valores da componente tendencial;

C_i são os valores da componente cíclica;

S_i são os valores da componente sazonal e,

I_i são os valores da componente irregular.

$i = 1, 2, \dots, n$

Como no caso do modelo aditivo, se os dados forem registrados anualmente, o modelo fica na forma:

$$Y_i = T_i \cdot C_i \cdot I_i \quad (4)$$

Nas previsões, tanto no modelo aditivo como no multiplicativo, não se inclui a componente irregular no modelo, pois ela é resultado de fatos aleatórios, teoricamente imprevisíveis.

É importante observar que, mesmo que o modelo clássico seja apropriado para analisar uma série temporal, nem sempre todos os fatores componentes citados estarão apresentados na série, ou seja, a série pode apresentar todos os fatores, somente um deles ou qualquer combinação possível.

Com a decomposição da série identifica-se quais componentes estão atuando e com isso obtêm-se equações para realizar previsões para valores futuros da série.

O primeiro passo em uma análise de séries temporais é fazer o gráfico da série e observar suas tendências ao longo do tempo. Se houver uma movimentação crescente ou decrescente da série em longo prazo, isto é, uma tendência, pode-se utilizar o Método de Mínimos Quadrados para ajuste e previsão da tendência. Se não houver uma tendência de longo prazo, pode ser aplicado o método de médias móveis ou o método de ajuste exponencial para ajustar a série e assim, ter uma impressão geral de longo prazo.

2 AJUSTAMENTO E PREVISÃO DA TENDÊNCIA

Em uma série temporal, o fator componente mais frequentemente estudado é a tendência.

Com a identificação da tendência em uma série temporal é possível: fazer previsões; removê-la da série para facilitar a visualização dos outros componentes e identificar o nível da série.

Como dito anteriormente, a tendência pode ser obtida de três maneiras: através de um modelo de regressão (modelo linear), através de médias móveis ou através de ajuste exponencial.

2.1 Modelo Linear

O ajustamento da tendência, através de um Modelo de Regressão Linear, é obtido pelo Método de Mínimos Quadrados. A reta de tendência é dada por:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \quad (5)$$

onde:

X_i = valor da variável tempo (ano, mês, trimestre, semestre, etc.)

Y_i = valor da variável estudada na série temporal

$i = 1, 2, \dots, n$

Os coeficientes angular e linear da reta são obtidos, respectivamente, por:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \quad (6)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (7)$$

sendo \bar{y} e \bar{x} as médias aritméticas das variáveis Y e X .

Um valor positivo do coeficiente angular da reta indica tendência crescente, se for negativo indica tendência decrescente.

Para facilitar os cálculos no ajuste da tendência por mínimos quadrados, codifica-se os valores X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ por números inteiros positivos 1, 2, 3, ..., de modo que a n -ésima observação da série tenha n como código.

Uma vez obtida a equação $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$, os valores para X_i podem ser substituídos para prever valores para Y_i .

2.2 Ajuste De Tendência Por Médias Móveis E Ajuste Exponencial

Quando o gráfico de uma série temporal é construído e não conseguimos observar uma tendência crescente ou decrescente em longo prazo, devido à quantidade de variação dos dados, o método de Médias Móveis ou de Ajuste Exponencial pode ser usado para obter o nível da série. Os dois métodos são descritos a seguir.

2.2.1 Médias Móveis

O método de Médias Móveis consiste no cálculo sucessivo de médias aritméticas, calculadas ao longo do tempo, onde cada média é calculada para L períodos da série e o resultado é colocado exatamente no centro dos períodos. Progressivamente, vai sendo acrescentado um período seguinte e desprezando o primeiro da média imediatamente anterior, assim, novas médias irão sendo calculadas, e estas vão se movendo até o fim da série.

Segundo Levine (1998), para qualquer série composta de n anos, uma média móvel de extensão L pode ser calculada no ano i da seguinte maneira:

$$MM_1(L) = \frac{1}{L} \sum_{t=(i-L)/2}^{(i+L)/2} Y_{i+t} \quad (8)$$

onde:

L = um número ímpar de anos

$$i = \left(\frac{L-1}{2}\right) + 1, \left(\frac{L-1}{2}\right) + 2, \dots, n - \left(\frac{L-1}{2}\right)$$

Neste método, nenhuma média móvel pode ser obtida para os primeiros $\left(\frac{L-1}{2}\right)$ períodos ou para os últimos $\left(\frac{L-1}{2}\right)$ períodos da série.

De acordo com Levine (1998) quanto maior o número de períodos agrupados pela média móvel mais “alisada” fica a linha de tendência. No entanto, quanto maior o número de períodos, menor o número de valores de médias móveis que podem ser calculados e colocados no gráfico. Portanto, não é recomendável selecionar médias móveis com períodos de duração

maior do que 7 anos, porque estariam faltando muitos pontos de dados calculados no início e no final da série, prejudicando a análise geral da série inteira.

2.2.2 Ajuste Exponencial

O ajuste exponencial é outro método para se obter a tendência de uma série temporal.

Este método fornece uma média móvel exponencialmente ponderada ao longo da série temporal. Cada previsão ou valor ajustado depende de todos os valores previamente observados. Os pesos designados para os valores observados decrescem ao longo do tempo, de maneira que, o valor observado mais recentemente recebe o maior peso, o valor anterior recebe o segundo maior peso e assim por diante, com o valor observado inicialmente recebendo o menor peso.

Com este procedimento percebemos uma vantagem em relação ao método de médias móveis: todos os valores previamente observados ao período sob análise são utilizados no cálculo do ajuste.

O ajuste exponencial em uma série temporal para um período de tempo i qualquer, requer o uso da fórmula:

$$E_i = W \cdot Y_i + (1 - W) \cdot E_{i-1} \quad (9)$$

onde:

E_i = valor da série exponencialmente ajustada no período i

E_{i-1} = valor da série exponencialmente ajustada no período $i - 1$

Y_i = valor observado da série temporal no período i

W = peso ou coeficiente de ajuste ($0 < W < 1$)

A escolha do peso ou coeficiente de ajuste é subjetiva, porém pode-se estabelecer a seguinte regra para a escolha:

- se o interesse for somente no ajuste da série, ou seja, obter a tendência, dever ser utilizado um valor baixo para W (próximo de 0).
- se o objetivo for a realização da previsão é recomendável utilizar um valor alto para W (próximo de 1).

A realização da previsão no ajuste exponencial é feita tomando o valor ajustado no período de tempo atual (período i) como estimativa do valor observado da série temporal no período $i + 1$, ou seja,

$$\hat{Y}_{i+1} = E_i \quad (10)$$

A obtenção de previsões de curto prazo (um período no futuro), através do ajuste exponencial, é outra vantagem evidente sobre o método de médias móveis.

3 APLICAÇÕES

Para a aplicação dos métodos desenvolvidos escolheu-se duas séries para ajuste. Estas séries foram retiradas do livro Estatística: Teoria e Aplicações usando Microsoft Excel em Português dos autores LEVINE, D. M.; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. Os ajustes das séries foram obtidos utilizando o Microsoft Excel.

3.1 Ajuste e Previsão da Tendência por Mínimos Quadrados

Os dados abaixo representam as vendas anuais líquidas (em bilhões de dólares) da Upjohn Co., no período de 1970 a 1992.

Tabela 1: Vendas líquidas da Upjohn Co. (1970 - 1992)

Ano	Vendas	Ano	Vendas	Ano	Vendas	Ano	Vendas
1970	0,4	1976	1,0	1982	1,8	1988	2,7
1971	0,4	1977	1,1	1983	1,7	1989	2,9
1972	0,5	1978	1,3	1984	1,9	1990	3,0
1973	0,7	1979	1,5	1985	2,0	1991	3,4
1974	0,8	1980	1,8	1986	2,3	1992	3,6
1975	0,9	1981	1,9	1987	2,5		

Fonte: Moody's Handbook of Common Stocks, 1980, 1989, 1993.

Neste exemplo, a variável Y representa as vendas anuais líquidas da companhia e a variável X representa o tempo, com $n = 23$ períodos. Para facilitar a interpretação dos resultados os valores desta variável foram codificados.

O gráfico 01 apresenta o comportamento da série ao longo do 23 anos.

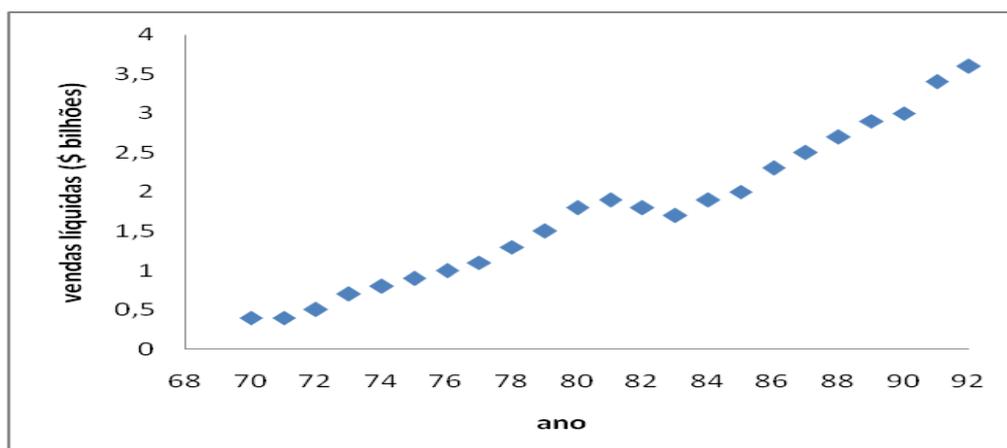


Gráfico 1: Vendas líquidas (\$ bilhões de dólares) da Upjohn Co.

Pelo gráfico observa-se que existe uma relação linear crescente entre o tempo e as vendas líquidas anuais, ou seja, ao longo dos 23 anos houve um aumento das vendas líquidas anuais da companhia. Primeiramente será utilizado o método de mínimos quadrados para ajustar o modelo linear.

A equação de mínimos quadrados, para esta série, é dada por:

$$\hat{Y}_i = 0,2163 + 0,1388 X_i \quad (11)$$

O valor $\hat{\beta}_0 = 0,2163$ é o valor de tendência ajustado, refletindo as vendas líquidas (em bilhões de dólares) da companhia Upjohn Co. no ano de 1970. A inclinação $\hat{\beta}_1 = 0,1388$ indica que as vendas líquidas vêm crescendo a uma taxa de 0,1388 bilhões de dólares por ano.

Se houver interesse em projetar a tendência das vendas líquidas da companhia para o ano de 1993 basta substituir, na equação (11), o valor $X = 24$. Com isto, o valor da previsão é:

$$\hat{Y}_i = 0,2163 + 0,1388(24) = 3,5475 \text{ bilhões de dólares}$$

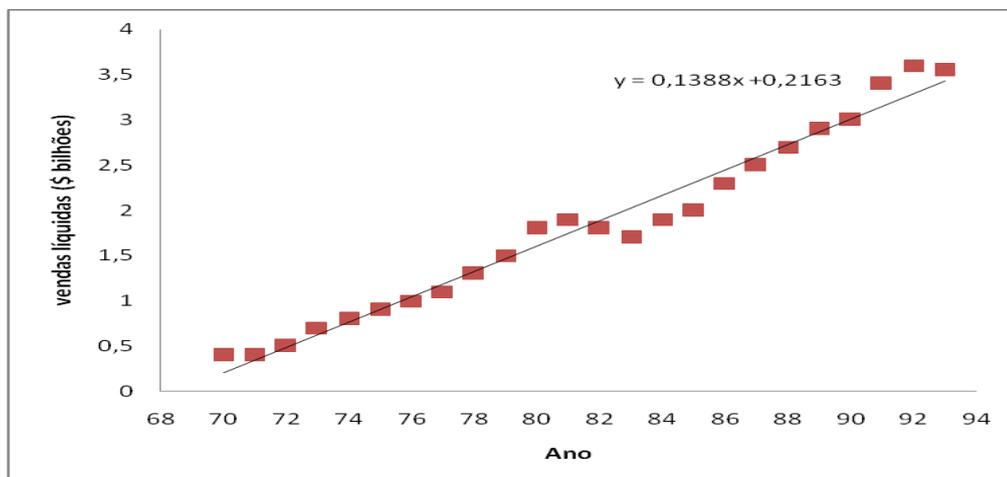


Gráfico 2: Equação de tendência linear para os dados de vendas líquidas (\$ bilhões) da Upjohn Co. e valor previsto para o ano de 1993

3.2 Ajuste e Previsão Da Tendência Por Médias Móveis E Ajuste Exponencial

Para aplicação destes dois métodos utilizou-se o conjunto de dados a seguir que representa os lucros anuais (em bilhões de dólares), por lote de ações, da TRW Inc., durante o período de 1970 a 1992.

Tabela 2: Lucro por conta na TRW Inc. (1970 - 1992)

Ano	Lucro	Ano	Lucro	Ano	Lucro	Ano	Lucro
1970	2,39	1976	4,02	1982	5,49	1988	4,23
1971	1,85	1977	4,77	1983	5,53	1989	4,31
1972	2,22	1978	5,42	1984	6,66	1990	3,39
1973	2,95	1979	5,86	1985	3,79	1991	2,30
1974	2,76	1980	6,15	1986	7,25	1992	3,09
1975	3,08	1981	6,60	1987	4,01		

Fonte: Moody's Handbook of Common Stocks, 1980, 1989, 1993.

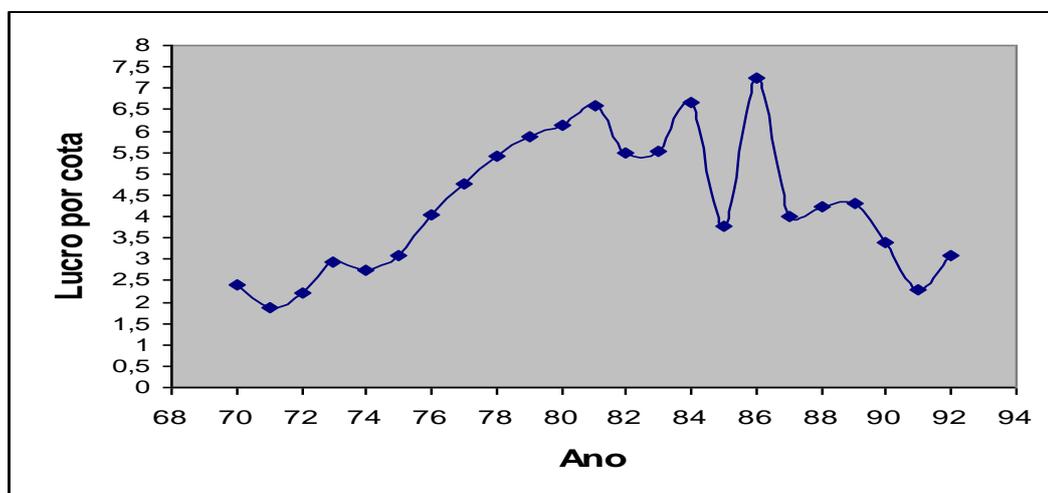


Gráfico 3: Lucros anuais, por lote de ações, da TRW Inc.

Analisando o gráfico 3 não é possível observar uma tendência crescente ou decrescente ao longo dos anos devido à quantidade de variações. Portanto, não é apropriado ajustar uma equação linear aos dados. Para obter o nível da série, ou seja, em que patamar estão os lucros anuais da TRW Inc., foi utilizado o método de Médias Móveis e o método de Ajuste Exponencial.

3.2.1 Médias Móveis

Para ajustar esta série por médias móveis foi utilizado períodos de 3 e 7 anos, respectivamente. A Tabela 3 apresenta o valor das médias móveis para os períodos considerados.

Tabela 3: Médias móveis (MM) de 3 e 7 anos, dos lucros anuais da TRW Inc.

Ano	Lucro	MM3	MM7	Ano	Lucro	MM3	MM7
1970	2,39			1977	4,77	4,736667	4,58
1971	1,85	2,153333		1978	5,42	5,35	5,128571
1972	2,22	2,34		1979	5,86	5,81	5,472857
1973	2,95	2,643333	2,752857	1980	6,15	6,203333	5,688571
1974	2,76	2,93	3,092857	1981	6,60	6,08	5,958571
1975	3,08	3,286667	3,602857	1982	5,49	5,873333	5,725714
1976	4,02	3,956667	4,122857	1983	5,53	5,893333	5,924286
1984	6,66	5,326667	5,618571	1989	4,31	3,976667	4,082857

1985	3,79	5,9	5,28	1990	3,39	3,333333
1986	7,25	5,016667	5,111429	1991	2,30	2,926667
1987	4,01	5,163333	4,805714	1992	3,09	
1988	4,23	4,183333	4,182857			

Observa-se na Tabela 3 que ao calcular as médias móveis de 3 anos não obteve-se resultados nem para o primeiro nem para o último valor observado da série temporal. Também, quando calculou-se médias móveis de 7 anos, não foram encontrados resultados para os três primeiros valores observados e para os três últimos valores observados. Isto ocorre porque a primeira média móvel de 7 anos é obtida através dos lucros da empresa durante os anos de 1970 e 1976, e está centralizada no ano de 1973 e a última média móvel é obtida pelos lucros da empresa durante os anos de 1986 e 1992, e está centralizada em 1989.

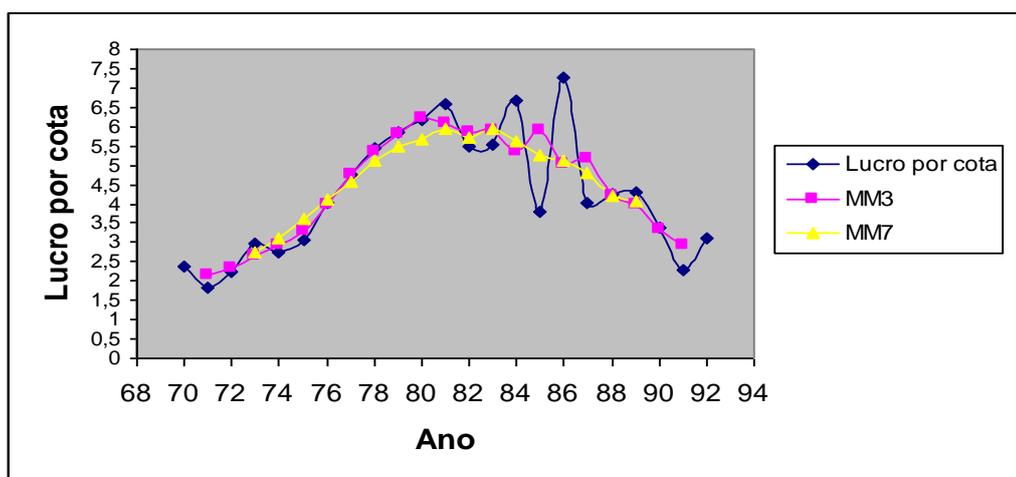


Gráfico 4: Médias móveis de 3 e 7 anos, para os lucros anuais, por lote de ações, da TRW Inc.

Analisando o gráfico 4 pode-se observar que a linha de tendência fica mais alisada com a média móvel de 7 períodos, representando melhor, a longo prazo, o comportamento da série. Considerando 7 períodos verifica-se que o lucro por cota oscila em torno de 4 bilhões de dólares. A tendência obtida pelo ajuste de médias móveis de 3 períodos se aproxima mais do comportamento dos dados originais.

3.2.2 Ajuste Exponencial

Para o ajuste exponencial da série utilizou-se o coeficiente de ajuste $w = 0,25$ e $0,75$.

Tabela 4: Ajuste exponencial (AE) para $w = 0,25$ e $0,75$, dos lucros anuais da TRW

Ano	Lucro	AE(W=0,25)	AE(W=0,75)	Ano	Lucro	AE(W=0,25)	AE(W=0,75)
1970	2,39	2,39	2,39	1982	4,77	5,33720503	5,73224485
1971	1,85	2,255	1,985	1983	5,42	5,38540378	5,58056121
1972	2,22	2,24625	2,16125	1984	5,86	5,70405283	6,3901403
1973	2,95	2,4221875	2,7528125	1985	6,15	5,22553962	4,44003508
1974	2,76	2,50664063	2,75820313	1986	6,60	5,73165472	6,54750877
1975	3,08	2,64998047	2,99955078	1987	5,49	5,30124104	4,64437719
1976	4,02	2,99248535	3,7648877	1988	5,53	5,03343078	4,3335943
1977	6,66	3,43686401	4,51872192	1989	4,31	4,85257308	4,31589857
1978	3,79	3,93264801	5,19468048	1990	3,39	4,48692981	3,62147464
1979	7,25	4,41448601	5,69367012	1991	2,30	3,94019736	2,63036866
1980	4,01	4,84836451	6,03591753	1992	3,09	3,72764802	2,97509217
1981	4,23	5,28627338	6,45897938				

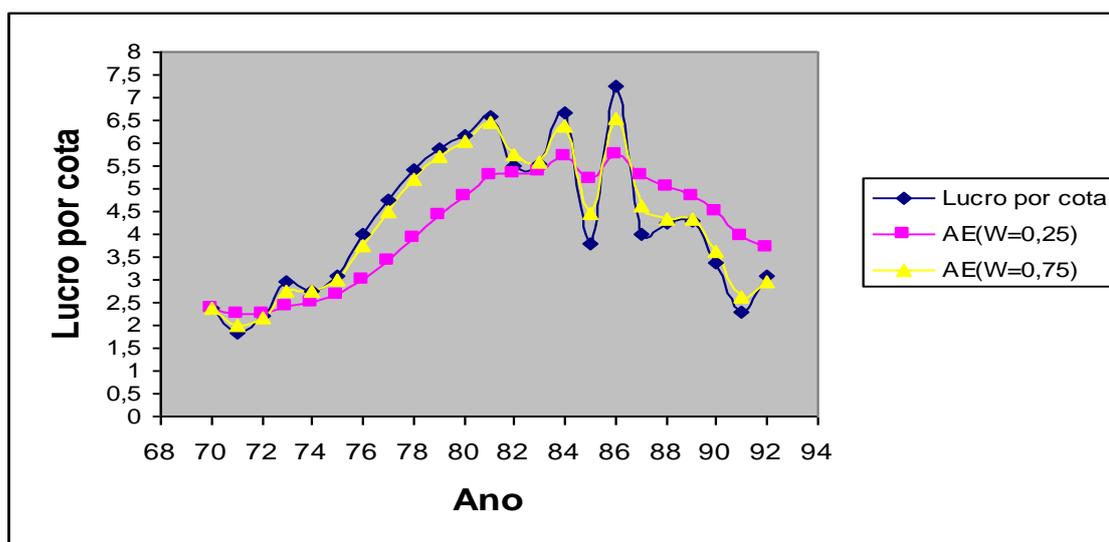


Gráfico 5: Ajuste Exponencial para $w = 0,25$ e $0,75$, para os lucros anuais, por lote de ações, da TRW Inc.

Analisando os gráficos 4 e 5, é possível verificar semelhanças entre a série de 3 anos de médias móveis e a série ajustada exponencialmente com peso $w = 0,75$. Também é verificado que a série de médias móveis de 7 anos corresponde á série exponencialmente ajustada com peso $w = 0,25$. Portanto, a escolha do coeficiente de ajuste depende do objetivo do estudo. Se o interesse for somente no ajustamento da série, eliminando as variações cíclicas e irregulares, deve-se escolher um valor baixo para w . Agora, se o objetivo for prever, e necessário escolher um valor alto para w . No primeiro caso, as tendências em longo prazo da série ficam mais aparentes e no último, direcionamentos futuros de curto prazo podem ser previstos de maneira mais adequada.

O cálculo da previsão no ajuste exponencial é feito tomando o valor ajustado no período de tempo atual (período i) como estimativa do valor observado da série temporal no período $i + 1$, ou seja,

$$\hat{Y}_{i+1} = E_i$$

Portanto, a previsão do lucro da TRW Inc. para o ano de 1993, considerando $w = 0,75$, é de 2,98 bilhões de dólares. A possibilidade de se prever o valor futuro no período $i + 1$ é uma vantagem em relação ao método de médias móveis.

CONCLUSÃO

Este estudo mostrou a grande importância de se analisar uma série temporal em duas séries econômicas, com o objetivo principal de fazer previsões sobre valores futuros.

Observou-se que a componente tendência, frequentemente encontrada e estudada numa série temporal, pode ser ajustada pelos métodos de mínimos quadrados, médias móveis e ajuste exponencial.

Quando se verifica, através da análise gráfica, uma componente crescente ou decrescente, é vantajoso utilizar o método de mínimos quadrados para ajuste da equação linear. Com isto pode-se fazer previsão para valores futuros da série.

Por outro lado, quando a série apresenta muitas variações, é aconselhável utilizar o método das médias móveis ou ajuste exponencial para “alisar a série”. A vantagem do ajuste

exponencial é a possibilidade de se utilizar o valor ajustado no tempo atual i como estimativa do valor observado da série no tempo $i + 1$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEVINE, D. M.; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. *Estatística: Teoria e Aplicações usando Microsoft Excel em Português*. São Paulo: LTC, 1998.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. *Análise de Séries Temporais*. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 2004.

SPIEGEL, M. R. *Estatística*. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 1994.